بررسی تحلیلی اندرکنش صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر با نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی★

قاسم گرجی بندپی[۱] مرتضی اسکندری قادی[۲] عزیزالله اردشیر بهرستاقی[۳]

چکیده *هدف از این مقاله تحلیل هم‌زمان یک صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر و نشیمن آن که یک محیط نیم‌بینهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی است، می‌باشد به‌طوری که مجموعه‌ی تحت اثر نیروی قائم متقارن محوری مؤثر بر صفحه قرار گرفته‌است. در بررسی تحلیلی جزئیات اندرکنش بین صفحه‌ی انعطاف‌پذیر و نیم‌فضا در این مقاله ناحیه‌ی تماس صفحه و نیم‌فضا بدون قابلیت تحمل کشش در نظر گرفته شده‌است. به‌منظور حل، با اعمال نیروی حلقوی قائم بر دو محیط نیم‌فضا و صفحه به‌صورت جداگانه، توابع گرین تغییرمکان قائم این دو محیط در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌دست می‌آید و با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی تغییرمکان‌ها در ناحیه‌ی تماس، معادلات انتگرالی دوگانه‌ی حاکم بر تنش تماسی مسأله به‌دست می‌آید. برای حل این معادلات از روش المان‌های محدود استفاده می‌شود به‌طوری‌که با به‌کارگیری المان‌های رینگی‌شکل و با تغییر تدریجی اندازه‌های المان، شرایط یکنواختی و تکینگی مسأله قابل مدل‌سازی می‌باشد. به‌منظور تأیید صحت انجام محاسبات در این مطالعه، نتایج به‌دست آمده با مقالات پایه‌ای موجود در دو حالت اندرکنش خطی و غیرخطی صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر با نیم‌فضا مقایسه شده‌است. در ادامه برخی نتایج جدید به‌دست آمده در این مطالعه به‌منظور نشان دادن اثرات درجات مختلف ناایزوتروپی نیم‌فضا به‌صورت جداول و گراف‌هایی ارائه شده است. نتایج این مقاله برای مدل‌سازی واقعی شالوده‌های مستقر بر خاک با رفتار ایزوتروپ جانبی استفاده می‌شود.*

واژه‌های کلیدی نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی، صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر، متقارن محوری، معادلات انتگرالی دوگانه، روش المان‌های رینگی.

Analytical Investigation of Interaction between Flexible Circular Plate with Transversely Isotropic Half-space

G. Gorji-Bandpay M. Eskandari-Ghadi A. Ardeshir-Behrestaghi

Abstract *A transversely isotropic half-space with axis of material symmetry perpendicular to the free surface supports a flexible circular plate. The contact area of the plate and the half-space is considered to be both frictionless and unbonded (tensionless). The foundation is affected by a vertical static axisymmetric load. Detailed analysis of the interaction of these two systems is the target of this paper. With the use of ring load Green's functions for both the plate and the continuum half-space, dual integral equations accompanied with some inequalities are obtained to model the complex boundary value problem. With the incorporation of the ring-shape finite element method, where its size gradually varies, we are capable of capturing both regular and singular solution smoothly. The validity of the combination of the analytical and numerical method is proved with comparing the results of this paper with a number of benchmark cases of both linear and nonlinear interaction of circular plate and half-space. Some new illustrations are presented to portray the aspect of the anisotropy of the half-space.*

Keyword Transversely Isotropic Half-Space, Flexible Circular Plate, Axial Axisymmetric, Dual Integral Equations, Ring-Element Method.

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۲/۱۰ و تاریخ پذیرش آن ۹٤/۱/۲۵ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، مهندسی عمران- سازه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل.

(۲) نویسنده‌ی مسئول، استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده‌ی عمران، دانشگاه تهران.

(۳) استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده‌ی عمران، دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل.

مقدمه

بسیاری از مصالح در طبیعت و نیز ساخته‌های مصنوعی رفتار ایزوتروپ جانبی دارند. از آن‌جمله می‌توان به رفتار اعضای مستقیماً برگرفته از تنه‌ی درختان، محیط خاکی زیر ساختمان‌ها و صفحات چندلایه اشاره کرد. اهمیت بررسی پاسخ این مصالح از دیرباز مورد توجه بوده است به‌طوری که میشل در سال ۱۹۰۰ میلادی به بررسی یک نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت نیروهای سطحی دلخواه پرداخته است [24]. لخنیتسکی در سال ۱۹٤۰ محیط ایزوتروپ جانبی را در حالت متقارن محوری و بدون پیچش در نظر گرفته و معادلات درگیر حاکم بر مسئله را با معرفی یک تابع پتانسیل به‌صورت مجزا و قابل حل در آورده‌است [22]. هو محیط ایزوتروپ جانبی را در حالت کلی مورد توجه قرار داده و تابع پتانسیل لخنیتسکی را برای حالت کلی تکمیل کرده‌است [21]. این تابع هم‌اکنون در ادبیات مکانیک محیط‌های پیوسته با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت نام تابع لخنیتسکی- هو- نواکی نامیده می‌شود. محیط با رفتار ایزوتروپ جانبی توسط دیگران هم‌چون الیوت[11]، ایوبنکس و استرنبرگ[18]، پن و چو [27] و ونگ و ونگ [31] نیز در حالت استاتیکی بررسی شده‌است. دینگ و همکاران در سال ۲۰۰٦ مطالعه‌ی کاملی بر روی رفتار محیط ایزوتروپ جانبی داشته‌اند. آنها اثر بارگذاری‌های مختلف از جمله تنش‌های ناشی از نیرو و حرارت سه‌بعدی را بر روی این محیط بررسی نموده‌اند [10]. این محیط در حالت دینامیکی توسط اسکندری قادی [12] و اسکندری قادی و همکاران [13] و دیگران مورد توجه قرار گرفته است.

از طرفی دیگر، مسائل تنش تماسی مورد علاقه بسیاری از محققان در زمینه‌ی علوم مهندسی و ریاضیات بوده‌است. دامنه‌ی کاربرد این مسائل بسیار زیاد است و از آن جمله می‌توان به طراحی فونداسیون در سازه‌های سنگین، مهندسی روسازی، آزمایش‌های تعیین میزان تغییرمکان در سطح تماس دو محیط، اندرکنش بین دو سطح و کاربرد آنها در علم مکانیک اشاره کرد. بسته به میزان سختی نسبی مصالح در سطح تماس آنها، هندسه‌ی ناحیه‌ی تماس و بارگذاری وارد، مسائل غیرخطی بسیاری می‌تواند مطرح شود و شامل تماس سطوح صلب- الاستیک و الاستیک- الاستیک می‌باشد که توزیع تنش تماسی در آنها ممکن است به‌صورت یکنواخت یا به‌صورت سینگولار باشد. در زمینه اندرکنش صفحه‌ی صلب و محیط ایزوتروپ جانبی در حالت استاتیکی و دینامیکی تحقیقاتی صورت گرفته‌است که می‌توان از تحقیقات اسکندری قادی و اردشیر بهرستاقی [۲] و [17 ,16 ,15 ,14] به‌عنوان نمونه نام برد. در یک حالت خاص از این‌گونه مسائل می‌توان به بررسی مسئله‌ی تنش تماسی در سطح بدون قابلیت تحمل کشش بین یک محیط الاستیک و یک صفحه‌ی انعطاف‌پذیر تحت اثر بار متمرکز مرکزی قرار گرفته بر روی آن، پرداخت.

تحلیل یک صفحه‌ی دایره‌ای و فونداسیون وینکلر (Winkler) توسط تیموشنکو و ووینوسکی در سال ۱۹۵۹ توضیح داده شده‌است [30]. ویتسمن در سال ۱۹٦۹ یک راه حل تقریبی برای تعیین شعاع تماس بین یک صفحه‌ی الاستیک و یک نیم‌فضای الاستیک ارائه داد [32]. او در مطالعه خود صفحه‌ی دایره‌ای را در سطح تماس بدون قید و تحت اثر یک بار متمرکز در وسط در نظر گرفت. هم‌چنین او در سال ۱۹۷۱ به بررسی یک تیر اویلر- برنولی (Euler-Bernoulli) تحت بار متمرکز متحرک قرار گرفته بر روی یک فونداسیون بدون قابلیت تحمل کشش پرداخت [33]. او در این مطالعه به این نتیجه رسید که میزان دامنه‌ی بارگذاری و سرعت حرکت بار بر روی ناحیه‌ی جدایی تیر از فونداسیون تأثیر بسزایی دارد. او در ادامه‌ی مطالعات خود، در سال ۱۹۷۲ به محاسبه‌ی تقریبی فاصله‌ی نقطه‌ی اثر بارگذاری روی یک تیر الاستیک قرارگرفته بر روی یک نیم‌فضای الاستیک بدون خمش پرداخت [34]. در ادامه گِلدول و اییر در سال ۱۹۷٤ به بررسی تماس بدون قابلیت تحمل کشش بین یک صفحه‌ی

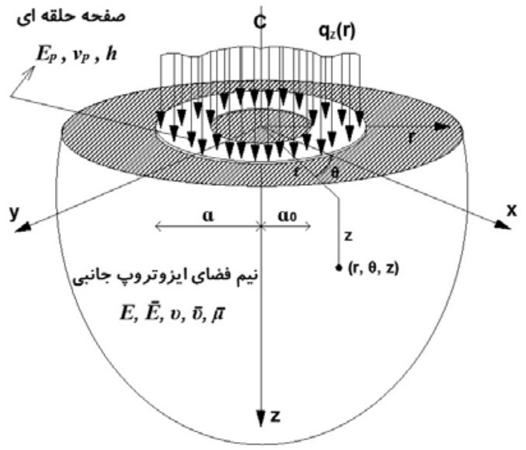
دایره‌ای الاستیک و نیم‌فضای ایزوتروپ پرداختند [19]. آنها بارگذاری وارد بر روی صفحه را به‌صورت گسترده و متقارن در نظر گرفتند و برای تحلیل نیم‌فضا از تبدیل انتگرالی هنکل و برای تحلیل صفحه از تئوری کریشهف (Kirchhoff) و ریسنر (Reissner) استفاده کردند. در ادامه آنها با استفاده از پیوستگی تغییرمکان در نقاط مختلفی از ناحیه‌ی تماس، مقدار تنش تماسی را برحسب بارگذاری وارد و سختی نسبی بین صفحه و فونداسیون تعیین کردند. سیلیپ [3, 4, 6]، سیلیپ و همکاران [5]، سیلیپ و دمیر [7, 8] و سیلیپ و گولر [9] مطالعاتی بروی مسائل استاتیکی و ارتعاشات هارمونیک دینامیکی بر روی تیر، صفحات دایره‌ای و مستطیلی قرار گرفته بر روی فونداسیون‌های بدون قابلیت تحمل کشش از نوع وینکلر و الاستیک انجام داده‌اند. به‌عنوان مثال، سیلیپ و گولر در سال ۲۰۰۷ به تعیین پاسخ استاتیکی و دینامیکی صفحه‌ی دایره‌ای قرار گرفته بر روی فونداسیون بدون اصطکاک با تعریف دو پارامتر پرداختند. آنها در تحقیقاتشان، تنش تماسی p را به‌صورت دو پارامتری به شکل $k_w w - k_s \nabla^4 w$ تعریف کردند که k_w و k_s دو پارامتر برای مدل‌سازی اثر خاک زیرین فونداسیون و w تغییرمکان فونداسیون می‌باشد. پک و همکاران در سال ۲۰۰۸ به تحلیل کامل تماس بدون قابلیت تحمل کشش یک صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای قرار گرفته بر روی نیم‌فضای ایزوتروپ پرداختند. آنها مسأله‌ی تماس انعطاف‌پذیر بدون کشش را توسط معادلات انتگرالی و شرایط مرزی و پیوستگی حاکم بر مسأله‌ی مدل‌سازی کردند و شعاع ناحیه‌ی تماس را به‌عنوان یک مجهول اضافه به روش سعی و خطا محاسبه نمودند [26].

تا جایی که نویسندگان مطلع هستند، اندرکنش صفحه‌ی انعطاف‌پذیر و محیط ایزوتروپ جانبی بررسی نشده‌است. لذا در این مقاله این موضوع مورد توجه قرار گرفته‌است. بدین منظور ابتدا با اعمال نیروی قائم رینگی به صفحه و حل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر صفحه، تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه‌ی دایره‌ای به‌دست می‌آید. در ادامه‌ی معادلات حاکم بر نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی در سیستم مختصات استوانه‌ای شامل معادلات تعادل، روابط تنش- کرنش یا معادلات رفتاری و روابط کرنش- تغییرمکان بیان شده و در ادامه معادلات تعادل بر حسب مؤلفه‌های بردار تغییر مکان به‌دست می‌آیند. این معادلات شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند که برای مجزاسازی آنها از تابع پتانسیل لخنیتسکی استفاده می‌شود. در ادامه به‌کمک تبدیل انتگرالی هنکل، مولفه‌های بردار تغییرمکان در فضای تبدیل‌یافته برای نیروی قائم با توزیع رینگی به‌دست می‌آید و با اعمال تبدیل معکوس هنکل، توابع گرین تغییرمکان قائم و افقی نیم‌فضا به‌دست می‌آید و با کمک تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه‌ی انعطاف‌پذیر و نیز شرایط پیوستگی موجود در سطح تماس آنها طریقه‌ی به‌دست آوردن معادلات انتگرالی دوگانه مورد بحث قرار می‌گیرد. با توجه به انعطاف‌پذیر بودن صفحه، ناحیه‌ای از صفحه از نیم‌فضای زیرین وابسته به نوع بارگذاری و سختی نسبی صفحه و نیم‌فضا جدا می‌شود. شعاع این ناحیه به روش سعی و خطا تعیین می‌شود. سپس معادله‌ی انتگرالی به‌دست آمده با استفاده از روش المان‌های محدود و به‌کارگیری المان‌های رینگی با توزیع ثابت فشار حل می‌شود. از نتایج حاصل، فشار زیرصفحه‌ی انعطاف‌پذیر تعیین شده و از آن اندازه نیروی تماسی در اثر تحریک وارد به صفحه به‌دست می‌آید. نشان داده می‌شود که نتایج به‌دست آمده از این روش برای مواد ایزوتروپ در حالتی که سختی صفحه به سمت بی‌نهایت میل کند (صفحه‌ی صلب)، بر نتایج قبلی ارائه شده توسط لوکو و میتا [23] و در حالتی که سختی صفحه محدود است (صفحه‌ی انعطاف‌پذیر)، بر نتایج ارائه شده توسط پک و همکاران [26] منطبق است. اثر میزان ناایزوتروپی بر رفتار اندرکنش صفحه‌ی

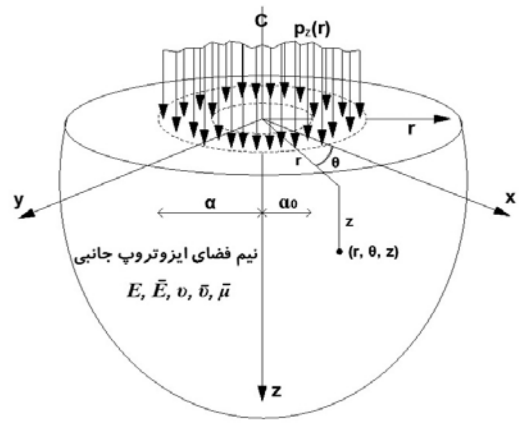
انعطاف‌پذیر و نیم‌فضا به‌کمک جداول و گراف‌هایی نشان داده می‌شوند.

چگونگی حل مسأله

صفحه‌ی حلقه‌ای انعطاف‌پذیر به شعاع داخلی a_0 و شعاع خارجی a مستقر بر نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر بارگذاری قائم متقارن محوری $q_z(r)$ و تنش تماسی $p_z(r)$ در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱ و۲). E_p مدول یانگ، v_p ضریب پواسون و h ضخامت صفحه می‌باشد. α شعاعی است که تا قبل از آن صفحه و نیم‌فضا با هم در تماس بودند و بعد از آن صفحه از نیم‌فضا جدا خواهد شد. فرض می‌شود که تئوری کریشهف بر صفحه حاکم و هم‌چنین سطح تماس صفحه و نیم‌فضا بدون قابلیت تحمل کشش باشد. در ابتدا معادله‌ی حاکم به‌صورت کلی برای صفحه‌ی حلقه‌ای تحت اثر بار رینگی اعمال شده در شعاع r' حل می‌شود و پس از تعیین ضرایب ثابت حاصل از انتگرال‌گیری، تابع گرین حاکم بر تغییرمکان قائم صفحه‌ی حلقه‌ای به‌دست می‌آید. در ادامه برای داشتن این تابع در حالت صفحه‌ی دایره‌ای کامل با میل دادن شعاع داخلی a_0 به سمت صفر، ضرایب برای صفحه‌ی کامل به‌دست می‌آید و از آن تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه‌ی دایره‌ای به‌دست می‌آید. سپس معادلات تعادل حاکم بر نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی در نظر گرفته می‌شود و با اعمال بار رینگی، تابع گرین مؤلفه‌های تغییرمکان و تنش به‌دست می‌آید و در ادامه با استفاده از شرایط پیوستگی تغییرمکان قائم، تابع تنش تماسی صفحه $(p_z(r))$ با حل معادلات انتگرالی حاکم بر مسأله و با استفاده از روش المان‌های رینگی تعیین خواهند شد. در ادامه با داشتن تابع تنش تماسی، مقدار شعاع تماس α به عنوان مجهول اضافه با سعی و خطا قابل محاسبه خواهد بود و از روابط تنش–تابع پتانسیل و تغییرمکان– تابع پتانسیل، مقادیر تغییرمکان و تنش در نقاط مختلف صفحه و نیم‌فضا به‌دست می‌آیند.



شکل ۱ صفحه‌ی حلقه‌ای انعطاف‌پذیر مستقر بر نیم‌فضا



شکل ۲ اثر تنش تماسی صفحه‌ی حلقه‌ای بر روی نیم‌فضا

تعیین تابع گرین بار رینگی حاکم بر صفحه

صفحه‌ی حلقه‌ای تحت اثر بارگذاری قائم متقارن محوری $q_z(r)$ و واکنش بستر $p_z(r)$ در نظر گرفته می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر صفحه برای تغییرمکان عمودی $w_p(r)$ با فرض تغییرمکان‌های کوچک در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر می‌باشد [29]:

$$\nabla^4 w_p(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w_p(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_p(r)}{dr}\right) = \frac{\omega(r)}{D}, \quad (۱)$$

که در آن :

$$D = \frac{E_p h^3}{12(1-\nu_p{}^2)} \quad (۲)$$

و $\omega(r) = q_z(r) - p_z(r)$ برآیند بارگذاری قائم وارد بـر هر نقطه از صفحه می‌باشد. با در نظـر گـرفتن قـرارداد علامت مطـابق شـکل (۳) گشـتاور خمشـی و نیـروی برشی شعاعی صفحه به‌صورت زیر می‌باشند [29]:

$$M_r(r) = -D\left(\frac{d^2 w_p(r)}{dr^2} + \frac{\nu_p}{r}\frac{dw_p(r)}{dr}\right) \quad (۳)$$

$$V_r(r) = -D\left(\frac{d^3 w_p(r)}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 w_p(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw_p(r)}{dr}\right) \quad (٤)$$

به‌منظور به‌دست آوردن تابع گرین صفحه، به‌جای $\omega(r)$ بار رینگی عمودی با شدت $\frac{1}{2\pi r'}$ در شـعاع r' به‌صورت زیر و مطابق شکل (٤) در نظر گرفته می‌شود:

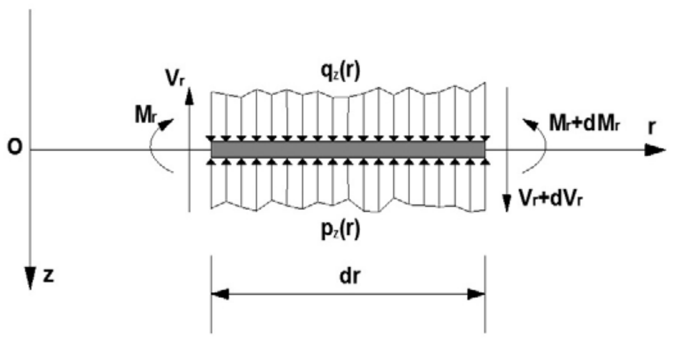
$$\omega(r) = \frac{\delta(r-r')}{2\pi r'} \quad (٥)$$

که در آن δ تابع دلتای دیراک می‌باشد.

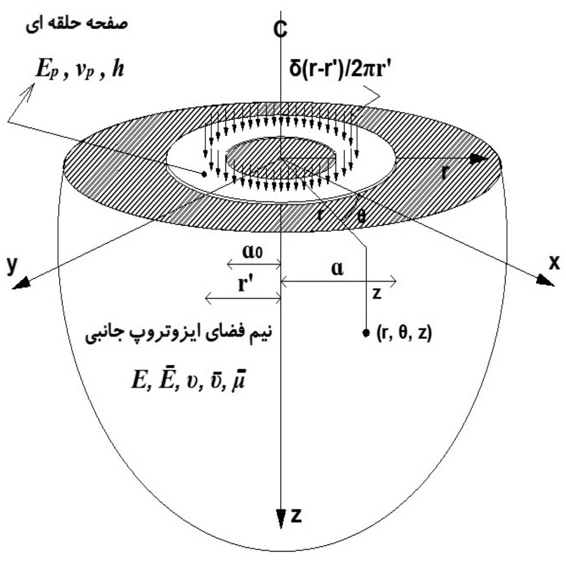
با تقسیم دامنه‌ی شعاعی صـفحه بـه دو ناحیـه بـا فصل مشترک در شعاع r'، به‌صورت زیر:

$$R_1 = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi,\ a_0 < r < r'\} \quad (٦)$$

$$R_2 = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi,\ r' < r < a\} \quad (٧)$$



شکل ۳ المان دیفرانسیلی صفحه‌ی تحت اثر بارگذاری قائم وارد بر آن در مختصات شعاعی



شکل ٤ صفحه‌ی حلقه‌ای انعطاف‌پذیر تحت اثر بار رینگی وارد بر آن در شعاع r'

جواب معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی چهارم حاکم بر صفحه در این دو ناحیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$w_p^1(r)=C_1r^2\ln r+C_2\ln r+C_3r^2+C_4,\qquad r\in R_1 \tag{۸}$$

$$w_p^2(r)=C_5r^2\ln r+C_6\ln r+C_7r^2+C_8,\qquad r\in R_2 \tag{۹}$$

در روابط فوق مقادیر C_1 الی C_8، ضرایب ثابت حاصل از انتگرال‌گیری می‌باشند که با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی حاکم بر صفحه تعیین خواهند شد.

با توجه به توضیحات فوق و با در نظر گرفتن شرایط گشتاور خمشی و نیروی برشی صفر در $r=a$، تغییرمکان و گشتاور خمشی صفر در $r=a_0$ و پیوستگی تغییرمکان، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی در $r=r'$، شرایط مرزی و پیوستگی حاکم بر صفحه‌ی حلقه‌ای به‌صورت :

$$\begin{gathered}w_p^1(a_0)=0,\ M_r^1(a_0)=0,\ M_r^2(a)=0,\\ V_r^2(a)=0,\ w_p^1(r')=w_p^2(r'),\ M_r^1(r')=M_r^2(r'),\\ \left.\frac{d}{dr}w_p^1(r)\right|_{r=r'}=\left.\frac{d}{dr}w_p^2(r)\right|_{r=r'},\ V_r^1(r')-V_r^2(r')=\frac{1}{2\pi r'}.\end{gathered} \tag{۱۰}$$

می‌باشند. با جای‌گذاری روابط (۳)، (٤)، (۸) و (۹) در روابط فوق، دستگاه معادلات حاکم بر ضرایب C_1 الی C_8 به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}&C_1a_0^2\ln a_0+C_2\ln a_0+C_3a_0^2+C_4=0,\\ &C_1\left(\nu_p+3+2\mathrm{Ln}\,a_0(1+\nu_p)\right)+C_2\frac{\nu_p-1}{a_0^2}+\\ &2C_3(1+\nu_p)=0,\\ &C_5\left(\nu_p+3+2\mathrm{Ln}\,a(1+\nu_p)\right)+C_6\frac{\nu_p-1}{a^2}+\\ &2C_7(1+\nu_p)=0,\quad \frac{4C_5D}{a}=0,\\ &r'^2\ln r'(C_1-C_5)+\ln r'(C_2-C_6)+\\ &r'^2(C_3-C_7)+C_4-C_8=0,\\ &(C_1-C_5)\left(2\ln r'(1+\nu_p)+\nu_p+3\right)+\\ &(C_2-C_6)\frac{\nu_p-1}{r'^2}+2(C_3-C_7)(1+\nu_p)=0,\\ &(C_1-C_5)r'(2\ln r'+1)+\frac{C_2-C_6}{a^2}+2r'(C_3-C_7)=0,\\ &\frac{4D}{r'}(C_5-C_1)-\frac{1}{2\pi r'}=0,\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با حل دستگاه معادلات فوق، ضرایب C_1 الی C_8 برای صفحه‌ی حلقه‌ای به‌صورت:

$$\begin{aligned}C_1&=\frac{-1}{8\pi D}\\ C_2&=\frac{a_0^2\left(2a^2(\nu_p+1)(\ln r'-\ln a_0)+(\nu_p-1)(a^2-r'^2)\right)}{8\pi D(a^2-a_0^2)(1-\nu_p)}\\ C_3&=\frac{1}{16\pi D(a^2-a_0^2)(\nu_p+1)}\Big[2(1+\nu_p)(a^2\ln r'-a_0^2\ln a_0)-\\ &\quad a_0^2(\nu_p+3)+2a^2(\nu_p+1)+r'^2(1-\nu_p)\Big]\\ C_4&=\frac{a_0^2}{16\pi D(a^2-a_0^2)(\nu_p^2-1)}\Big[2a^2\Big(2\ln a_0\ln r'(\nu_p^2+2\nu_p+1)+\\ &\quad 2\ln a_0(\nu_p^2-\nu_p^2\ln a_0-2\nu_p\ln a_0-\\ &\quad \ln a_0-1)+(1-\nu_p^2)(1+\ln r')\Big)+\\ &\quad r'^2\left(2\ln a_0(1-\nu_p^2)+\nu_p(\nu_p-2)+1\right)+\\ &\quad a_0^2\left(\nu_p^2+2\nu_p-3\right)\Big]\\ C_5&=0\\ C_6&=\frac{a^2\left(2a_0^2(\nu_p+1)(\ln r'-\ln a_0)+(\nu_p-1)(a_0^2-r'^2)\right)}{8\pi D(a^2-a_0^2)(1-\nu_p)}\\ C_7&=\frac{1}{16\pi D(a^2-a_0^2)(\nu_p+1)}\Big[2a_0^2(1+\nu_p)(\ln r'-\ln a_0)+\\ &\quad (a_0^2-r'^2)(\nu_p-1)\Big]\\ C_8&=\frac{1}{16\pi D(a^2-a_0^2)(\nu_p^2-1)}\Big[2a^2\Big(a_0^2\Big(-2\nu_p(\ln a_0)^2(\nu_p+2)+\\ &\quad 2\nu_p^2\ln a_0-\nu_p^2\ln r'+\\ &\quad 2\ln a_0\ln r'(\nu_p^2+2\nu_p+1)-2(\ln a_0)^2+\\ &\quad \ln r'-2\ln a_0-\nu_p^2+1\Big)+\\ &\quad r'^2\left(\ln r'(1-\nu_p^2)+\nu_p^2-1\right)\Big)+\\ &\quad a_0^2\Big(a_0^2\left(\nu_p^2+2\nu_p-3\right)+\\ &\quad r'^2\Big(2(\ln a_0-\ln r')(1-\nu_p^2)-\\ &\quad \nu_p^2-2\nu_p+3\Big)\Big)\Big]\end{aligned} \tag{۱۲}$$

به‌دست می‌آیند. با جای‌گذاری این ضرایب در روابط (۸) و (۹)، تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه‌ی حلقه‌ای در شعاع r ناشی از بار رینگی قائم در شعاع r' به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{w}_p^{annu}(r;r') = \left(C_1\, r^2\ln r + C_2\ln r + C_3\, r^2 + C_4\right)\times H(r'-r) + \left(C_5\, r^2\ln r + C_6\ln r + C_7\, r^2 + C_8\right)\times H(r-r').$$

(۱۳)

که در آن $H(.)$ تابع هویساید است و ضرایب C_1 الی C_8 در رابطه‌ی (۱۲) تعریف شده‌اند. اگر شعاع داخلی a_0 به‌صورت حدی برابر صفر در نظر گرفته شود، ضرایب C_1 الی C_8 برای صفحه‌ی دایره‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{-1}{8\pi D}, \qquad C_2 = 0,$$
$$C_3 = \frac{2a^2\left(\ln r'(\nu_p+1)+\nu_p+1\right)+r'^2(1-\nu_p)}{16\pi D a^2(\nu_p+1)}, C_4 = 0,$$
$$C_5 = 0, \qquad C_6 = \frac{r'^2}{8\pi D}, C_7 = \frac{-r'^2(\nu_p-1)}{16\pi D a^2(\nu_p+1)},$$
$$C_8 = \frac{-r'^2(\ln r'-1)}{8\pi D}.$$

(۱٤)

با جای‌گذاری ضرایب فوق در روابط (۸) و (۹)، تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه‌ی دایره‌ای در شعاع r ناشی از بار رینگی قائم در شعاع r' به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{w}_p^{solid}(r;r') = \left(\frac{2a^2\left(\ln r'(\nu_p+1)+\nu_p+1\right)+r'^2(1-\nu_p)}{16\pi D a^2(\nu_p+1)}r^2 - \frac{r^2\ln r}{8\pi D}\right)\times H(r'-r) + \left(\frac{r'^2}{8\pi D}\ln r - \frac{r'^2(\nu_p-1)}{16\pi D a^2(\nu_p+1)}r^2 - \frac{r'^2(\ln r'-1)}{8\pi D}\right)\times H(r-r').$$

(۱۵)

با استفاده از تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه دایره‌ای (رابطه‌ی ۱۵) و نظریه‌ی تقابل بتی [20]، تغییرمکان عمودی این صفحه تحت اثر برآیند نیروهای ناشی از بار قائم خارجی و تابع تنش تماسی به‌صورت رابطه‌ی انتگرالی زیر بیان می‌شود:

$$w_p(r) = w_p(0) + \int_0^a \bar{w}_p^{solid}(r;r')\left[q_z(r') - p_z(r')\right]dr',$$
$$0 < r < a$$

(۱٦)

تعیین تابع گرین بار رینگی حاکم بر نیم‌فضا

نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی که محل نشیمن صفحه می‌باشد طوری در نظر گرفته می‌شود که محور ایزوتروپی آن عمود بر سطح نشیمن صفحه باشد. دستگاه مختصات استوانه‌ای $(o:r,\theta,z)$ طوری قرار داده می‌شود که در آن امتداد z موازی محور ایزوتروپی باشد و نیم‌فضا با $z>0$ تعریف شود. معادلات تعادل برحسب تغییرمکان در شرایط متقارن محوری و برای حالتی که نیروهای حجمی وجود نداشته باشد به‌صورت زیر نوشته می‌شود [22]:

$$A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+A_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=0$$

$$A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+A_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+ (A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

(۱۷)

در این رابطه u و w مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به‌ترتیب در امتدادهای r و z هستند و A_{ij} ضرایب ارتجاعی می‌باشند که تانسور تنش σ_{ij} را به تانسور کرنش ε_{ij} مربوط می‌سازند [22]:

$$\sigma_{rr} = A_{11}\varepsilon_{rr}+A_{13}\varepsilon_{zz},\ \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{rr}+A_{13}\varepsilon_{zz},$$
$$\sigma_{zz} = A_{13}\varepsilon_{rr}+A_{33}\varepsilon_{zz},\ \sigma_{rz} = 2A_{44}\varepsilon_{rz}.$$

(۱۸)

ضریب اضافی A_{66} به‌صورت $A_{66}=(A_{11}-A_{12})/2$ تعریف می‌شود. این ضریب در ادامه به‌منظور نرمال کردن ضرایب استفاده خواهد شد. ضرایب ارتجاعی A_{ij} به‌صورت زیر برحسب ضرایب مهندسی نوشته می‌شوند [22]:

$$A_{11} = \frac{E(1-\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2)}{(1+\upsilon)(1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2)}, A_{13} = \frac{E\bar{\upsilon}}{1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2},$$
$$A_{33} = \frac{\bar{E}(1-\upsilon)}{1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2}, A_{44} = \bar{\mu}, A_{66} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = \mu.$$

(۱۹)

در رابطه‌ی (١٩) E معرف مدول یانگ در صفحه‌ی ایزوتروپی، $\bar{E}$ معرف مدول یانگ عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی، υ معرف ضریب پواسون در صفحه‌ی ایزوتروپی، $\bar{\upsilon}$ معرف ضریب پواسون امتداد عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی نسبت به هر امتداد در صفحه‌ی ایزوتروپی می‌باشد، μ معرف مدول برشی در صفحه‌ی ایزوتروپی و $\bar{\mu}$ معرف مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی می‌باشد. برای مواد همسان (ایزوتروپ) ضرایب ارتجاعی A_{ij} به‌صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$A_{11}=A_{33}=\frac{2\mu(1-\upsilon)}{1-2\upsilon}, A_{12}=A_{13}=\frac{2\mu\upsilon}{1-2\upsilon},$$
$$A_{44}=A_{66}=\mu. \qquad (٢٠)$$

در روابط فوق، μ معرف مدول برشی و υ معرف ضریب پواسون می‌باشد.

معادلات تعادل (١٧) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند. به‌منظور مجزاسازی این معادلات از تابع پتانسیل اسکالر لخنیتسکی (F) به‌علت کامل بودن در حالت تقارن محوری و سادگی استفاده می‌شود. مؤلفه‌های بردار تغییرمکان برحسب تابع پتانسیل F در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت استاتیکی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [31]:

$$u=-\alpha_3\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}, \qquad w=(1+\alpha_1)\left[\nabla^2+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]F. \qquad (٢١)$$

که در آن:

$$\alpha_1=\frac{A_{66}+A_{12}}{A_{66}}, \alpha_2=\frac{A_{44}}{A_{66}}, \alpha_3=\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{66}},$$
$$\beta=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}, \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \qquad (٢٢)$$

با قرار دادن روابط (٢١) در معادلات تعادل (١٧) معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل F به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla_1^2\nabla_2^2 F(r,z)=0. \qquad (٢٣)$$

که در آن:

$$\nabla_i^2=\nabla^2+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (i=1,2). \qquad (٢٤)$$

و پارامترهای s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های معادله‌ی زیر هستند:

$$A_{33}A_{44}s^4+(A_{13}^2+2A_{13}A_{44}-A_{11}A_{33})s^2+A_{11}A_{44}=0 \qquad (٢٥)$$

با توجه به مثبت بودن انرژی کرنشی، s_1 و s_2 می‌توانند اعداد مختلط باشند اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [22]. به هر حال قسمت حقیقی s_1 و s_2 مثبت هستند. با توجه به هندسه‌ی مسئله و شرایط مسئله در rهای بزرگ از تبدیل هنکل مرتبه‌ی صفر نسبت به امتداد شعاعی به‌شرح زیر استفاده می‌شود [28]:

$$F^{(0)}(\xi,z)=\int_0^\infty F(r,z)\, r J_0(\xi r)\, dr \qquad (٢٦)$$

به‌طوری‌که تبدیل معکوس هنکل آن عبارتند از:

$$F(r,z)=\int_0^\infty F^{(0)}(\xi,z)\, \xi J_0(\xi r)\, d\xi \qquad (٢٧)$$

و J_0 تابع بسل نوع اول از مرتبه‌ی صفر می‌باشد. با اعمال عملگر تبدیل هنکل مرتبه صفر به معادله‌ی (٢٣) و استفاده از تعریف (٢٦)، معادله‌ی (٢٣) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\bar{\nabla}_1^2\ \bar{\nabla}_2^2\ F^{(0)}(\xi,z)=0 \qquad (٢٨)$$

که در آن:

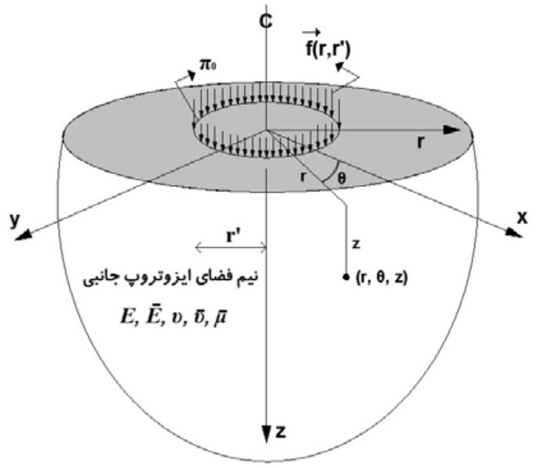
$$\bar{\nabla}_i^2=d^2/(s_i^2 dz^2)-\xi^2, \qquad (i=1,2). \qquad (٢٩)$$

معادله‌ی (٢٨) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی چهارم با ضرایب ثابت می‌باشند. جواب معادله‌ی (٢٨) با توجه به شرایط در دوردست به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F^{(0)}(\xi,z)=A(\xi)e^{-s_1\xi z}+B(\xi)e^{-s_2\xi z} \qquad (٣٠)$$

مطابق شکل (٥) فرض می‌شود نیروی استاتیکی قائم به‌شدت $f(r,r')$ روی رینگ π_0 به شعاع r' در $z=0$ اعمال می‌گردد. این نیرو به‌صورت زیر در امتداد $\mathbf{e}_z$ تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f}(r,r')=\frac{\delta(r-r')}{2\pi r}\mathbf{e}_z, \qquad (٣١)$$



شکل ۵ نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت نیرو با توزیع حلقوی مؤثر بر حلقه‌ای به شعاع r'

که تبدیل هنکل آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f^{(0)}(\xi, r') = \frac{J_0(\xi r')}{2\pi}. \quad (۳۲)$$

به‌طور واضح اندازه‌ی کـل نیـروی $\mathbf{f}(r,r')$ برابـر واحد است:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{\delta(r-r')}{2\pi r} r\, dr\, d\theta = 1. \quad (۳۳)$$

شرایط مرزی در $z=0$ با توجه به رابطه‌ی (۳۱) و شکل (۵) عبارتند از:

$$\sigma_{rz}(r, z=0; r') = 0, \qquad \sigma_{zz}(r, z=0; r') = -f(r,r'). \quad (۳۴)$$

کــه در آن $f(r,r')$ انــدازه $\mathbf{f}(r,r')$ اســت. همان‌طور کـه پیشـتر نیـز اسـتفاده شـده‌است کلیـه‌ی مؤلفـه‌هـای تانسـور تـنش و بـردار تغییرمکـان در دوردست $(z \to \infty)$ یا $(r \to \infty)$ صفر هستند.

$$\lim_{\sqrt{r^2+z^2}\to\infty} \sigma_{ij}(r,z) = 0, \quad \lim_{\sqrt{r^2+z^2}\to\infty} u(r,z) = 0, \quad \lim_{\sqrt{r^2+z^2}\to\infty} w(r,z) = 0. \quad (۳۵)$$

شرایط مرزی داده شـده در روابـط (۳۴) بایـد در فضای تبدیل‌یافته نوشته شوند تا بـا جـایگزینی معادلـهٔ (۳۰) در آنها بتوان توابـع $A(\xi)$ و $B(\xi)$ را بـه‌دسـت آورد. بدین منظور مؤلفه‌های بردار تغییرمکان و تانسور تنش در فضای هنکل به‌صورت زیر برحسب تـابع F^0 نوشته می‌شوند:

$$u^{(1)}(\xi, z) = \alpha_3 \xi \frac{dF^{(0)}}{dz} \quad (۳۶)$$

$$w^{(0)}(\xi, z) = (1+\alpha_1)\left[-\xi^2 + \beta \frac{d^2}{dz^2}\right] F^{(0)} \quad (۳۷)$$

$$\sigma_{zz}^{(0)}(\xi, z) = \frac{d}{dz}\left[\alpha_3 A_{13}\xi^2 - A_{33}\xi^2(1+\alpha_1) + A_{33}\alpha_2 \frac{d^2}{dz^2}\right] F^{(0)} \quad (۳۸)$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}(\xi, z) = A_{44}\xi\left[(\alpha_3 - \alpha_2)\frac{d^2}{dz^2} + \xi^2(1+\alpha_1)\right] F^{(0)} \quad (۳۹)$$

با جای‌گذاری تابع F^0 در روابط (۳۶) الـی (۳۹)، توابع تغییرمکان و تنش در فضـای تبـدیل‌یافتـه نوشـته می‌شود و با اعمال عملگر تبدیل معکوس، توابع گـرین مؤلفه‌های تغییرمکان و تنش بـرای نیـروی حلقـوی در فضای واقعی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\bar{u}_h(r, z; r') = -\alpha_3 \int_0^\infty \xi^3 \left[s_1 A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + s_2 B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right] J_1(\xi r)\, d\xi, \quad (۴۰)$$

$$\bar{w}_h(r, z; r') = (1+\alpha_1) \int_0^\infty \xi^3 \left[+\beta\left(s_1^2 A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + s_2^2 B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right) - \left(A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right)\right] J_0(\xi r)\, d\xi, \quad (۴۱)$$

$$\bar{\sigma}_{zzh}(r, z; r') = \int_0^\infty -\xi^2\left(\alpha_3 A_{13}\xi^2 - A_{33}\xi^2(1+\alpha_1)\right) \times \left(s_1 A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + s_2 B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right) - A_{33}\alpha_2 \xi^4 \times \left(s_1^3 A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + s_2^3 B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right)\Big] J_0(\xi r)\, d\xi, \quad (۴۲)$$

$$\bar{\sigma}_{rzh}(r, z; r') = A_{44} \int_0^\infty \xi^4 \left[(\alpha_3 - \alpha_2)\left(s_1^2 A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + s_2^2 B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right) + (1+\alpha_1)\left(A(\xi) e^{-s_1 \xi z} + B(\xi) e^{-s_2 \xi z}\right)\right] J_1(\xi r)\, d\xi. \quad (۴۳)$$

با استفاده از شرایط مرزی (۳۴) و روابـط (۳۷) و (۳۸) ضرایب $A(\xi)$ و $B(\xi)$ بـه‌صـورت زیـر برحسـب $f^{(0)}(\xi, r')$ نوشته می‌شوند:

$$A(\xi)=\frac{-f^{(0)}(\xi,r')\,\eta_2(\xi)}{I(\xi)\,A_{33}} \qquad (٤٤)$$

$$B(\xi)=\frac{f^{(0)}(\xi,r')\,\eta_1(\xi)}{I(\xi)\,A_{33}} \qquad (٤٥)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
&\eta_1(\xi)=(1+\alpha_1-\alpha_2 s_2{}^2+\alpha_3 s_2{}^2)\xi^2,\\
&\eta_2(\xi)=(1+\alpha_1-\alpha_2 s_1{}^2+\alpha_3 s_1{}^2)\xi^2,\\
&\lambda_1(\xi)=s_2\xi\ ,\ \lambda_2(\xi)=s_1\xi,\\
&\varphi_1(\xi)=\alpha_2\lambda_1(\xi)^2-\xi^2(1+\alpha_1),\\
&\varphi_2(\xi)=\alpha_2\lambda_2(\xi)^2-\xi^2(1+\alpha_1),\\
&\nu_1(\xi)=(1+\alpha_1-\alpha_2 s_2{}^2-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}})s_2\xi^3,\\
&\nu_2(\xi)=(1+\alpha_1-\alpha_2 s_1{}^2-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}})s_1\xi^3,\\
&I(\xi)=\eta_2(\xi)\nu_1(\xi)-\eta_1(\xi)\nu_2(\xi).
\end{aligned} \qquad (٤٦)$$

با استفاده از توابع گرین مؤلفه‌های تغییرمکان و تنش نیم‌فضا (روابط ٤٠ الی ٤٣) تغییرمکان‌ها و تنش‌های نیم‌فضا تحت اثر تنش تماسی صفحه در فضای واقعی به‌صورت روابط انتگرالی زیر بیان می‌شوند:

$$u_h(r,z)=\int_0^a \bar{u}_h(r,z;r')\,p_z(r')\,dr', \qquad (٤٧)$$

$$w_h(r,z)=\int_0^a \bar{w}_h(r,z;r')\,p_z(r')\,dr', \qquad (٤٨)$$

$$\sigma_{zzh}(r,z)=\int_0^a \bar{\sigma}_{zzh}(r,z;r')\,p_z(r')\,dr', \qquad (٤٩)$$

$$\sigma_{rzh}(r,z)=\int_0^a \bar{\sigma}_{rzh}(r,z;r')\,p_z(r')\,dr'. \qquad (٥٠)$$

معادلات انتگرالی و شرایط پیوستگی حاکم بر مسأله

برای در نظر گرفتن شرایط فیزیکی مسأله، فرض می‌شود که ناحیه‌ی تماس صفحه و نیم‌فضا به‌صورت یکنواخت بدون قابلیت تحمل کشش باشد. هم‌چنین به‌دلیل داشتن لبه‌ی آزاد در صفحه‌ی دایره‌ای (شعاع α)، یک شعاع بلندشدگی (α) وجود خواهد داشت.

از آن‌جایی که ناحیه‌ی تماس قابلیت انتقال کشش ندارد و با توجه به شرایط پیوستگی جابه‌جایی عمودی صفحه و نیم‌فضا، روابط زیر در ناحیه تماس برای صفحه دایره‌ای حاکم می‌باشند:

$$w_h(r,0)=w_p(r), \qquad 0\le r<\alpha \qquad (٥١)$$

$$p_z(r)\ge 0, \qquad 0\le r<\alpha \qquad (٥٢)$$

برای اطمینان از عدم نفوذ صفحه در داخل نیم‌فضا در ناحیه‌ی بلندشدگی $(\alpha < a)$ رابطه‌ی زیر نیز باید برقرار باشد:

$$w_h(r,0)>w_p(r),\ \ p_z(r)=0,\quad \alpha\le r<a \qquad (٥٣)$$

اگر تماس صفحه و نیم‌فضا به‌صورت کامل برقرار باشد به‌عبارت دیگر اگر کلیه‌ی نیروهای تماسی در همه جای ناحیه‌ی اتصال فشاری باشد، a در روابط (٥١) الی (٥٣) جایگزین α می‌شود.

با توجه به روابط (١٦) و (٤٨)، رابطه‌ی (٥١) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&w_p(0)+\int_0^a \bar{w}_p{}^{solid}(r;r')\,q_z(r')\,dr'-\int_0^\alpha \bar{w}_p{}^{solid}(r;r')\,p_z(r')\,dr'\\
&=\int_0^\alpha \bar{w}_h(r,0;r')\,p_z(r')\,dr',\qquad 0\le r<\alpha.
\end{aligned} \qquad (٥٤)$$

که در آن $\bar{w}_p{}^{solid}$ تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه‌ی حلقه‌ای می‌باشد. رابطه‌ی (٥٤) می‌تواند به‌صورت زیر نیز نوشته شود:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\alpha \left[\bar{w}_h(r,0;r')+\bar{w}_p{}^{solid}(r;r')\right]p_z(r')\,dr'-w_p(0)\\
&=\int_0^a \bar{w}_p{}^{solid}(r;r')\,q_z(r')\,dr',\qquad 0\le r<\alpha.
\end{aligned} \qquad (٥٥)$$

برای در نظر گرفتن شرایط تعادل کلی صفحه در امتداد قائم باید مجموع نیروهای خارجی در تعادل با تنش تماسی صفحه باشد. بنابراین رابطه‌ی زیر نیز باید برقرار باشد:

$$F_z=2\pi\int_0^a r'q_z(r')\,dr'=2\pi\int_0^\alpha r'p_z(r')\,dr' \qquad (٥٦)$$

همراه با محدودیت های ذکر شده در روابط (۵۲) و (۵۳) معادلات انتگرالی (۵۵) و (۵٦) با متغیرهای $p_z(r)$ و $w_p(0)$ تشکیل یک سیستم معادلات انتگرالی حاکم بر مسائل تماسی در حالت متقارن محوری را می‌دهد. هم‌چنین برای مسائل تماسی بدون قابلیت تحمل کشش، مقدار شعاع تماس α در نقطه‌ای رخ می‌دهد که باید به‌عنوان مجهول اضافه در حین تحلیل مسأله تعیین شود.

حل تحلیلی معادلات (۵۵) و (۵٦) بسیار مشکل است و به همین علت تحقیقات چندانی در این زمینه وجود ندارد. در ادامه با استفاده از روش المان‌های رینگی، مقدار واکنش بستر $p_z(r)$ که مجهول اصلی این معادلات می‌باشد به‌دست می‌آید و از آن می‌توان با استفاده از روابط موجود، مقادیر تغییرمکان و تنش صفحه و نیم‌فضا را در هر نقطه‌ی دلخواه به‌دست آورد.

روش المان‌های رینگی

برای تحلیل نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای به شعاع a، نیم فضای مورد نظر تحت N تابع فشار رینگی با شدت ثابت $p_i, (i=1,2,3,\dots,N)$ مؤثر بر حلقه‌ای به شعاع مرکزی $\bar{r}_i$ و عرض L_i قرار می‌گیرد به‌طوری که N تعداد حلقه‌هایی می‌باشد که تحت فشار حلقوی قرار دارند (شکل‌های ٦). به‌منظور انجام محاسبات دقیق‌تر به‌خصوص در لبه‌های خارجی صفحه عرض هر المان از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$L_i=\left(\frac{(N+1-i)^m}{\sum_{k=1}^{N}k^m}\right)a,\ \ (i=1,2,3,\dots,N) \qquad (۵۷)$$

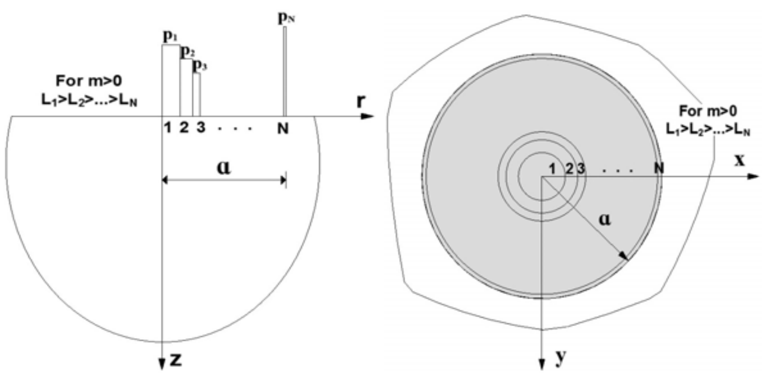
که در آن m ثابت دلخواهی می باشد. به‌ازای m=0 تمام المان‌ها عرض ثابتی خواهند داشت و با افزایش مقدار m، عرض المان‌ها با نزدیک شدن به لبه‌ی صفحه کاهش خواهد یافت. این ویژگی شرایط تکینگی به‌خصوص در لبه‌ی خارجی صفحه‌ی صلب دایره‌ای را ارضا خواهد کرد.

در این صورت، تغییرمکان هر نقطه از محیط با مختصات $M(r,z)$ برابر:

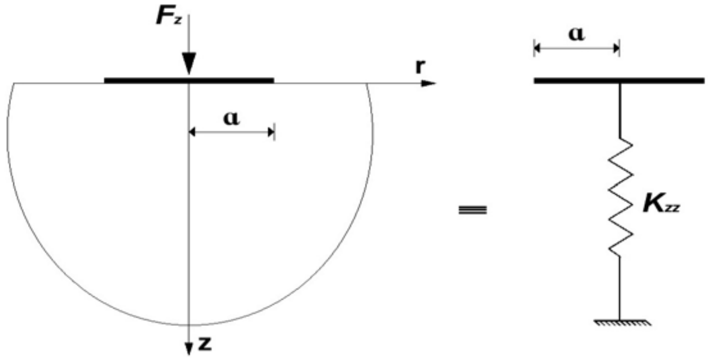
$$W(M)=\sum_{i-1}^{N}W_i(M) \qquad (۵۸)$$

می‌باشد، به‌طوری که $W_i(M)$ تغییرمکان نقطه‌ی M به‌علت فشار حلقوی p_i مؤثر بر حلقه‌ای به شعاع $\bar{r}_i$ و به پهنای L_i است. از آن‌جایی که p_i ثابت می‌باشد، $W_i(M)$ با استفاده از رابطه‌ی (٤٨) برابر است با:

$$W_i(M)=p_i\,\bar{W}_i(M)=p_i\int_{m_i}^{n_i}\bar{w}_h(r,z;r')\,dr',$$
$$m_i=\sum_{j=1}^{i}L_j-L_i,\,n_i=\sum_{j=1}^{i}L_j,(i=1,2,3,\dots,2N). \qquad (۵۹)$$



شکل ٦ نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت فشار با توزیع حلقوی مؤثر بر N حلقه با پهنای متغیر در صفحه‌ی دایره‌ای



شکل۷ نمایش شماتیک فنر معادل نیم‌فضا برای صفحه‌ی صلب دایره‌ای به شعاع a

از آن‌جایی که صفحه‌ی دایره‌ای مورد مطالعه انعطاف‌پذیر می‌باشد، تغییرمکان نقاط مختلف نیم‌فضا در محل تماس با صفحه، غیریکنواخت است و برابر تغییرمکان صفحه می‌باشد. با مساوی قرار دادن تغییرمکان N نقطه $M_i(r=\bar{r}_i, z=0)$ با $w_p(\bar{r}_i), (i=1,2,3,\ldots,N)$، N معادله تشکیل خواهد شد، به‌طوری که با حل آنها N مجهول $p_i, (i=1,2,3,\ldots,N)$ تعیین می‌شوند. با در اختیار داشتن p_iها، توزیع تغییرمکان و تنش در هر نقطه از نیم‌فضا و صفحه تعیین خواهند شد. از این میان می‌توان توزیع فشار تماسی صفحه و محیط را نیز تعیین نمود. هم‌چنین در حالتی که سختی صفحه به‌سمت بی‌نهایت میل کند (صفحه‌ی صلب)، با تعیین نیروی کل تماسی از رابطه‌ی زیر:

$$F_z = 2\pi\int_0^a r\,p_z(r)\,dr = 2\pi\sum_{i=1}^{N} p_i\,L_i\,. \qquad (٦٠)$$

سختی بی‌بعد فنر متمرکز معادل نیم‌فضا (شکل۹) از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$K_{zz} = \frac{F_z}{w_p(0)\,a\,A_{66}} \qquad (٦١)$$

عبارت $a\,A_{66}$ در رابطه‌ی (٦١) برای بی‌بعد شدن مقدار سختی اضافه شده‌است. هم‌چنین سختی فنر گسترده‌ی معادل نیم‌فضا با استفاده از رابطه‌ی $K_z = K_{zz} / \pi a^2$ به‌دست می‌آید.

نتایج عددی

در این بخش، نتایج به‌دست آمده از بخش‌های قبلی به‌صورت عددی برآورد می‌شوند. برآورد عددی انتگرال‌های ارائه‌شده در بخش‌های قبلی نیاز به دقت خاصی دارد، چرا که حد بالای انتگرال تابع گرین مربوط به نیم‌فضا محدود نیست و باید با دقت مناسب تعیین شود. برای برآورد عددی، ۵ نوع ماده مطابق جدول (۱) در نظر گرفته می‌شود. در این جدول دو ماده‌ی اول ایزوتروپ با ضرایب پواسون ۰/۲۵ و ۰/۳۳ است و مابقی با رفتار ایزوتروپ جانبی می‌باشد. ماده‌ی ایزوتروپ با ضریب پواسون ۰/۲۵، (Mat 1) در این جدول، همان ماده‌ای است که پک و همکاران [26] در نظر گرفته‌اند و ماده‌ی ایزوتروپ با ضریب پواسون۰/۳۳، (Mat 2)، ماده‌ای است که لوکو و میتا [23] در نظر گرفته‌اند. هم‌چنین ماده‌ی ایزوتروپ جانبی شماره‌ی ۳ این مطالعه (Mat 3) ماده‌ای است که اسکندری قادی و همکاران [14] در نظر گرفته‌اند. مطابق تحقیقات آنها سختی بی‌بعد فنر قائم معادل نیم‌فضا متشکل از ماده‌ی شماره‌ی ۱ تحت شالوده‌ی صلب دایره‌ای برابر ۵/۳۳۳۳ و برای ماده‌ی شماره‌ی ۲ برابر ٦/۰۰۰۰ و برای ماده‌ی شماره‌ی ۳ برابر ۹/٤۹٤۸ می‌باشد. اندازه‌ی مناسب المان‌ها با استفاده از رابطه‌ی (۵۷) تعیین می‌شود. در این مطالعه برای صفحه‌ی صلب دایره‌ای m برابر ۲ و برای صفحه‌ی انعطاف‌پذیر برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. لازم به توضیح است که تکینگی تنش تماسی در لبه‌ی صفحه در حالت صلب بسیار قابل‌توجه است و نیاز به ریزتر شدن المان نسبت به حالت انعطاف‌پذیر دارد. برای تعیین اندازه‌ی

مناسب، با تغییر تعداد المان‌ها سختی بی‌بعد فنر قائم (K_{zz}) برای ماده‌ی شماره‌ی ۱، ۲ و ۳ به‌دست می‌آید و از آن تعداد المان‌های مناسب چنان تعیین می‌شود که جواب‌های به‌دست آمده منطبق بر جواب‌های موجود در مقالات مرتبط باشند. سختی بی‌بعد فنر قائم به‌دست آمده از روش ارائه‌شده در این مقاله تحت اثر شالوده‌ی صلب دایره‌ای با تعداد المان‌های معادل ۵، ۱۰، ...، ۳۰ المان برای مواد شماره‌ی ۱، ۲ و ۳ به‌دست آمده و در جدول (۲) الی (٤) لیست شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در ماده‌ی شماره‌ی۱، برای۵المان میزان خطای نسبی $\left(K_{zz(exact)} - K_{zz(num)}\right) / K_{zz(exact)}$ برابر ۰/۵۱۰۰ درصد و برای ۳۰ المان این خطا برابر ۰/۰۰۱۸ درصد است. در ادامه، کلیه‌ی محاسبات با در نظر گرفتن ۳۰ المان انجام می‌شود. همان‌طور که پیشتر گفته شد، روش ارائه‌شده برای تعیین اندازه‌ی المان شرایط لازم برای رسیدن به دقت مناسب و در نظر گرفتن تکینگی فشار تماسی را در لبه‌های صفحه دارا می‌باشد.

جدول ۱ مشخصات مکانیکی مصالح انتخابی

Material	1 ایزوتروپ	2 ایزوتروپ	3 ایزوتروپ جانبی	4 ایزوتروپ جانبی	5 ایزوتروپ جانبی
$E\,(N/mm^2)$	50000	53333	50000	100000	150000
$\overline{E}\,(N/mm^2)$	50000	53333	150000	50000	50000
$G\,(N/mm^2)$	20000	20000	20000	40000	60000
$\overline{G}\,(N/mm^2)$	20000	20000	20000	20000	20000
υ	0.25	1/3	0.25	0.25	0.25
$\overline{\upsilon}$	0.25	1/3	0.25	0.25	0.25

جدول ۲ مقایسه‌ی سختی قائم شالوده‌ی صلب دایره‌ای ناشی از نتایج تحلیلی پک و همکاران [26] و نتایج عددی این مطالعه برحسب تعداد المان (ماده‌ی شماره‌ی ۱)

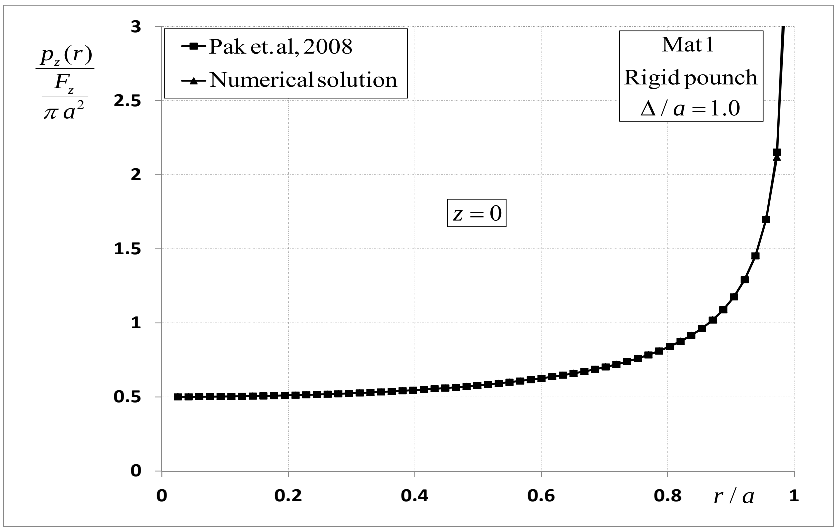
تعداد المان	$K_{zz}(num)$	$K_{zz}(exact)$	اختلاف ٪
5	5.3061	5.3333	0.5100
10	5.3289	5.3333	0.0825
15	5.3319	5.3333	0.0262
20	5.3327	5.3333	0.0112
25	5.3331	5.3333	0.0037
30	5.3332	5.3333	0.0018

جدول ۳ مقایسه‌ی سختی قائم شالوده‌ی صلب دایره‌ای ناشی از نتایج تحلیلی لوکو و میتا [23] و نتایج عددی این مطالعه برحسب تعداد المان (ماده‌ی شماره‌ی ۲)

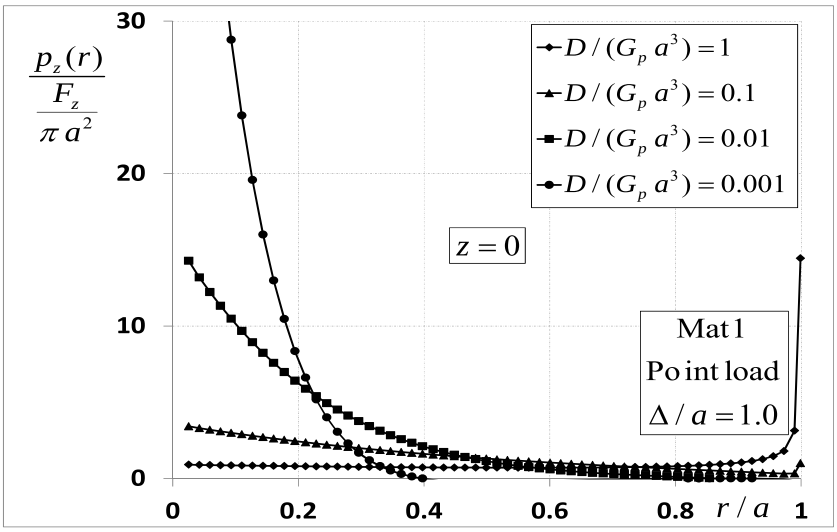
تعداد المان	$K_{zz}(num)$	$K_{zz}(exact)$	اختلاف ٪
5	5.9693	6.0000	0.5117
10	5.9950	6.0000	0.0833
15	5.9984	6.0000	0.0267
20	5.9993	6.0000	0.0117
25	5.9998	6.0000	0.0033
30	5.9999	6.0000	0.0017

جدول ٤ مقایسه‌ی سختی قائم شالوده‌ی صلب دایره‌ای ناشی از نتایج تحلیلی اسکندری قادی و همکاران [14] و نتایج عددی این مطالعه برحسب تعداد المان (ماده‌ی شماره‌ی ۳)

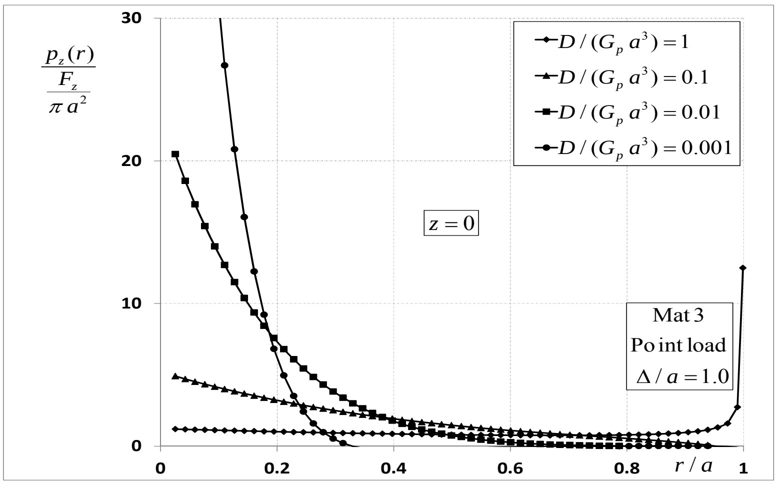
تعداد المان	K_{zz}(num)	K_{zz}(exact)	اختلاف ٪
5	9.4464	9.4948	0.5097
10	9.4869	9.4948	0.0832
15	9.4923	9.4948	0.0263
20	9.4938	9.4948	0.0105
25	9.4945	9.4948	0.0031
30	9.4947	9.4948	0.0010



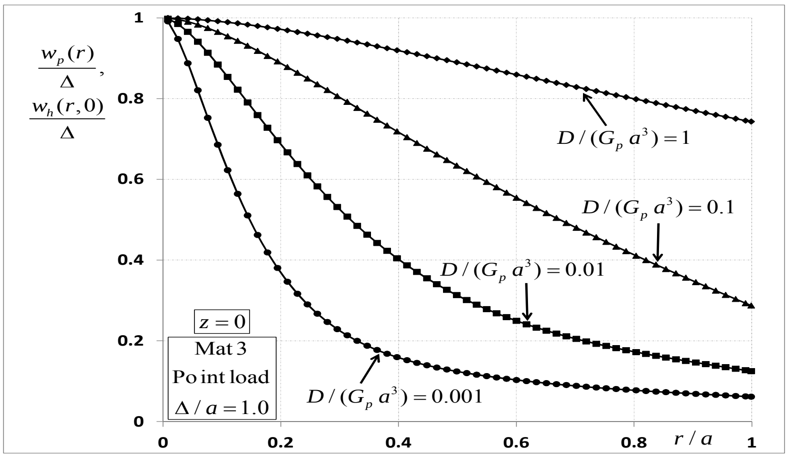
شکل ۸ مقایسه‌ی تنش تماسی حاصل از حل عددی مطالعه‌ی حاضر با حل تحلیلی پک و همکاران [26] برای صفحه‌ی صلب دایره‌ای تحت بار متمرکز مرکزی برای حالتی که تعداد المان‌ها ۳۰ است و کوچک‌ترین المان در لبه دارای پهنای 0.002a می‌باشد (ماده‌ی شماره‌ی ۱)



شکل ۹ تنش تماسی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای در حالت چسبندگی کامل صفحه با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۱)



شکل ۱۰ تنش تماسی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای در حالت چسبندگی کامل صفحه با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۳)



شکل ۱۱ تغییرمکان قائم نیم‌فضا و صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای در حالت چسبندگی کامل صفحه با نیم‌فضا تحت بارمتمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۳)

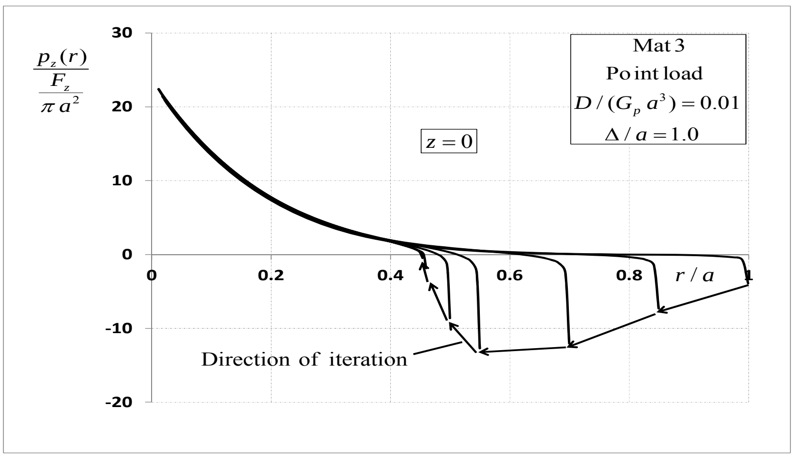
با استفاده از حل تحلیلی شالوده‌ی صلب دایره‌ای توسط پک و همکاران [26]، تنش تماسی صفحه‌ی صلب دایره‌ای به‌صورت رابطه‌ی $\sigma_{zzh}=0.5\left(1-r^2/a^2\right)^{-0.5}$ می‌باشد. همان‌طور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود، روش عددی این مطالعه، تمامی ویژگی‌های حل تحلیلی از جمله تکینگی فشار تماسی در لبه صفحه را به‌خوبی ارضا می‌کند. حتی با در نظر گرفتن ۵ المان رینگی برای ناحیه‌ی تماس، تنها حدود ۰/۵۱۰۰ درصد خطا نسبت به حل تحلیلی آن وجود دارد (جدول ۲). این شکل برای حالتی که سختی صفحه بی‌نهایت است و به‌صورت صلب می‌باشد، تحت اثر تغییرمکان یکنواخت Δ ترسیم شده و با نمودار دقیق آن مقایسه شده‌است. همپوشانی کامل این دو نمودار نشان از دقت بالای محاسبات با این روش عددی دارد.

در گراف‌های ارائه شده برای اهداف مقایسه‌ای، سختی صفحه به‌صورت نسبتی از مدول برشی آن نوشته شده‌است. بدین منظور مدول برشی صفحه برابر $G_p=2\times10^4$ نیوتن بر مترمربع و ضریب پواسون آن $\nu_p=0.25$ در نظرگرفته می‌شود. هم‌چنین برای رعایت اختصار، از این پس تغییرمکان مرکز صفحه‌ی دایره‌ای $\left(w_p(0)\right)$ با Δ نشان داده می‌شود.

شکل‌های (۹) و (۱۰) تنش تماسی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای و نیم‌فضا را با در نظر گرفتن

چسبندگی کامل صفحه و نیم‌فضا $(\alpha = a)$ تحت نیروی متمرکز با اندازه‌ی واحد در مرکز صفحه برای مواد شماره‌ی ۱ و ۳ نشان می‌دهد. همان‌طور که در این گراف‌ها مشاهده می‌شود تنش تماسی برای مقادیر مختلفی از سختی صفحه رسم شده‌است و طبق انتظار با کاهش سختی صفحه، تنش در مرکز صفحه زیاد می‌شود و با افزایش سختی آن مقدار تنش در لبه‌ی صفحه زیاد می‌گردد. شکل‌های نشان داده‌شده نشان از حاکم بودن رابطه‌ی (۵۲) در حالت تماس کامل صفحه و نیم‌فضا را دارد. شکل (۱۱) تغییرمکان قائم نیم‌فضا و صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای را برای ماده‌ی شماره‌ی ۳ به‌ازای چسبندگی کامل صفحه و نیم‌فضا و سختی‌های مختلف صفحه تحت بار متمرکز در مرکز صفحه نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود، با کاهش سختی صفحه، تغییرمکان انتهای صفحه بیشتر می‌شود و با افزایش سختی آن، مقدار تغییرمکان صفحه به تغییرمکان مرکز آن نزدیک‌تر می‌گردد. هم‌چنین به‌دلیل برقراری چسبندگی کامل صفحه و نیم‌فضا طبق رابطه‌ی (۵۱) مقدار تغییرمکان قائم صفحه و نیم‌فضا در کل شعاع صفحه با هم برابر می‌باشند.

همان‌طور که پیشتر گفته شد، مقدار شعاع چسبندگی α باید به‌عنوان یک مجهول اضافه در حین روند تحلیل تعیین شود. نحوه‌ی تعیین آن طبق شکل شماره‌ی (۱۲) به این صورت است که هم‌زمان با کاهش مرحله‌ای شعاع صفحه از a تا حدود α، مقدار تنش تماسی در هر مرحله ترسیم می‌شود. این روند تا یافتن اولین شعاع صفحه که به‌ازای آن، تنش در تمام نقاط صفحه از شعاع صفر تا آن شعاع (α) همگی مثبت باشند، ادامه می‌یابد. در جدول (۵) مقادیر α به‌دست آمده از این مطالعه با مقادیر به‌دست آمده از نتایج پک و همکاران [26] برای ماده‌ی ایزوتروپ شماره‌ی ۱ به‌ازای سختی‌های مختلف صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای، مقایسه شده است. اختلاف ناچیز این دو مطالعه نشان‌دهنده‌ی دقت بالای محاسبات می‌باشد. هم‌چنین در جدول (٦) به‌ازای سختی $D/(G_p a^3) = 0.01$ برای صفحه‌ی دایره‌ای، مقادیر α به‌دست آمده برای مواد ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی با هم مقایسه شده‌است. با توجه به این جدول، مقدار α در شرایط یکسان برای ماده‌ی شماره‌ی ۳ کمتر از سایر مواد می‌باشد و بدین معناست که ناحیه‌ی بلند شده‌ی صفحه در این ماده بیشتر از سایر مواد است که نشان‌دهنده‌ی سخت‌تر بودن این ماده است. از طرف دیگر ماده‌ی شماره‌ی ۲ دارای بیشترین نرمی بین مواد می‌باشد.



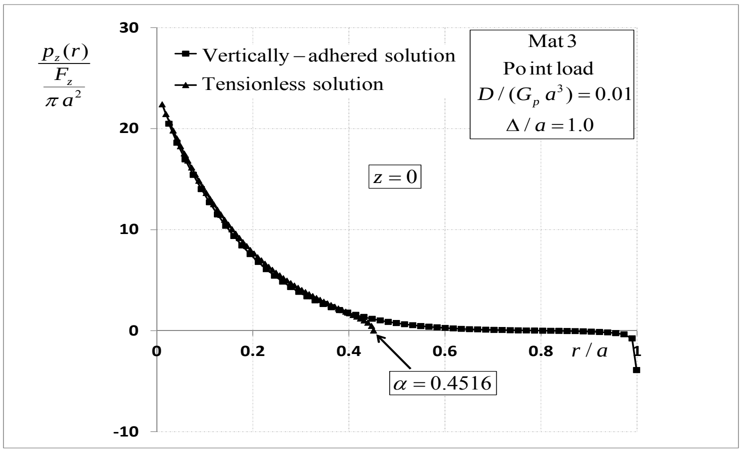
شکل ۱۲ روند یافتن شعاع چسبندگی صفحه و نیم‌فضا (α) برای صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای در حالت عدم چسبندگی صفحه با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۳)

جدول ۵ مقایسه‌ی شعاع تماس (α) به‌دست آمده از این مطالعه با نتایج پک و همکاران [26] به‌ازای مقادیر مختلف سختی صفحه برای صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر (ماده‌ی شماره‌ی ۱)

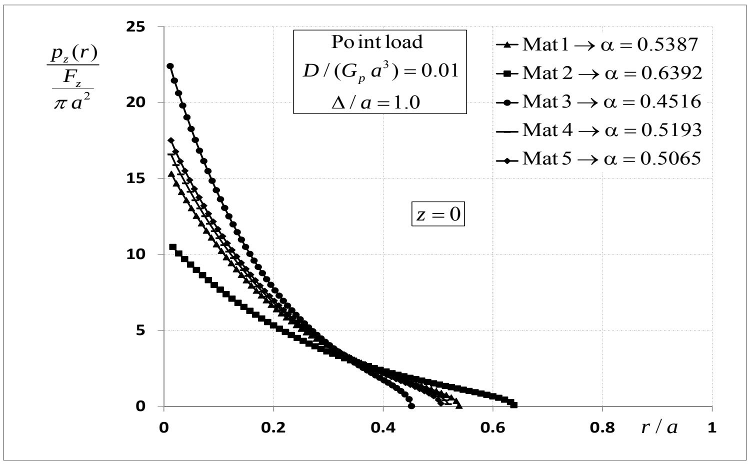
$D/(G_p a^3)$	مطالعه حاضر	Pak et al[2008]	اختلاف ٪
0.05	0.8572	0.8750	2.0343
0.03	0.7433	0.7590	2.0685
0.015	0.6080	0.6220	2.2508
0.01	0.5387	0.5435	0.8832

جدول ٦ شعاع تماس (α) به‌دست آمده برای مواد مختلف نیم‌فضا به‌ازای سختی $D/(G_p a^3)=0.01$ صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر

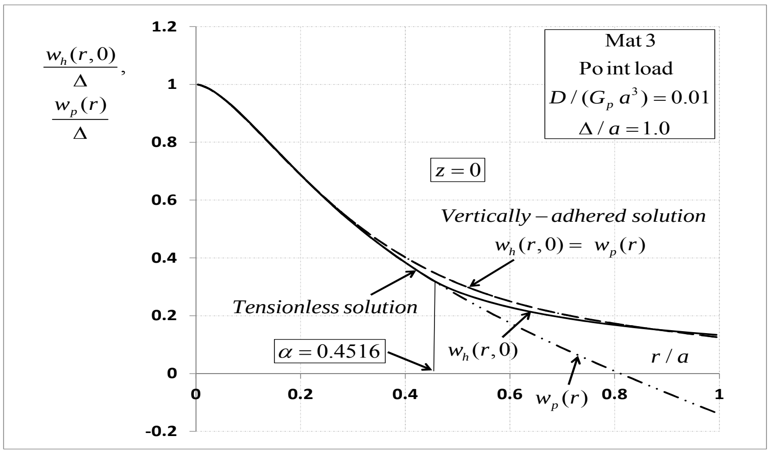
Material	Mat 1	Mat 2	Mat 3	Mat 4	Mat 5
α	0.5387	0.6392	0.4516	0.5193	0.5065



شکل ۱۳ مقایسه‌ی تنش تماسی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای با نیم‌فضا در دو حالت چسبنده و عدم چسبندگی صفحه با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۳)



شکل ١٤ مقایسه‌ی تنش تماسی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای با نیم‌فضا بین مواد مختلف نیم‌فضا در حالت عدم چسبندگی صفحه با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی

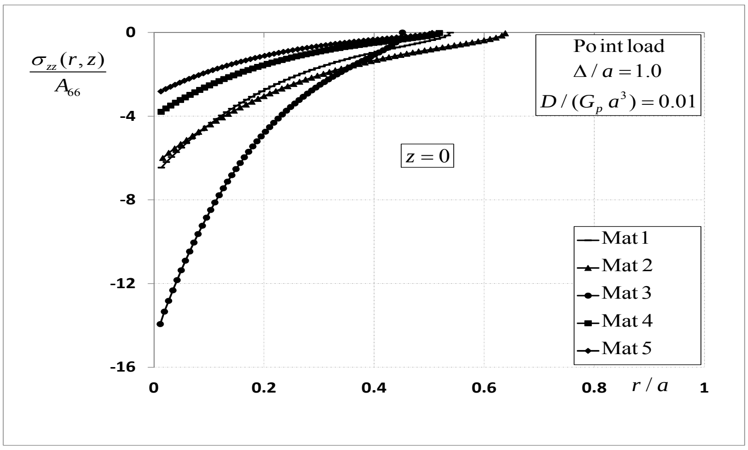


شکل ۱۵ مقایسه‌ی تغییرمکان قائم صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای و نیم‌فضا در دو حالت چسبنده و عدم چسبندگی صفحه با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۳)

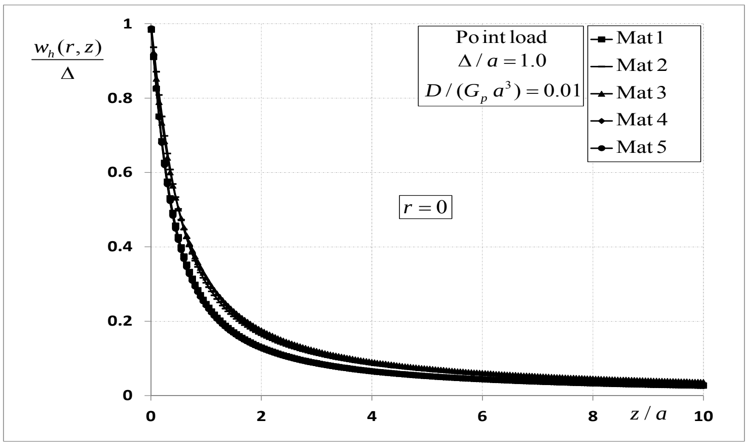
در شکل (۱۳)، تنش تماسی در دو حالت چسبندگی کامل صفحه‌ی دایره‌ای با نیم‌فضا و هم‌چنین عدم چسبندگی آنها برای ماده‌ی شماره‌ی ۳ و سختی ثابت $D/(G_p a^3) = 0.01$ ترسیم شده‌است. هم‌چنین در شکل (١٤) تنش تماسی در حالت عدم چسبندگی صفحه‌ی دایره‌ای با نیم‌فضا با همان سختی صفحه بین مواد مختلف نیم‌فضا به‌صورت مقایسه‌ای ترسیم شده است. اثر میزان ناهمسانی نیم‌فضا بر پاسخ نیروی مؤثر بر صفحه‌ی انعطاف‌پذیر مشاهده می‌شود. شکل (۱۵) تغییرمکان قائم صفحه‌ی دایره‌ای و نیم‌فضا را در دو حالت چسبندگی صفحه با نیم‌فضا و عدم چسبندگی آنها با مقدار سختی ثابت صفحه، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در شرایط عدم چسبندگی، از شعاع صفر تا α صفحه و نیم‌فضا با هم در تماس‌اند و از شعاع α تا a صفحه از نیم‌فضا جدا خواهد شد و تغییرمکان قائم نیم‌فضا از صفحه بیشتر می‌شود که نشان‌دهنده‌ی حاکم بودن رابطه‌ی (۵۳) می‌باشد.

شکل (١٦) مقادیر تنش قائم نیم‌فضا را در سطح نیم‌فضا به‌ازای مقدار سختی ثابت صفحه دایره‌ای نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با دور شدن از مرکز صفحه، طبق اصل منظم بودن جواب، مقدار تنش قائم نیم‌فضا به سمت صفر میل می‌کند. شکل (۱۷) مقادیر تغییرمکان قائم نیم‌فضا در عمق را به‌ازای مقدار سختی ثابت صفحه‌ی دایره‌ای نشان می‌دهد که در این مورد نیز مطابق فوق با دور شدن از محل اثر بار، مقدار تغییرمکان قائم صفحه به سمت صفر میل می‌کند. شکل (۱۸) تأثیر میزان سختی صفحه بر تغییرمکان قائم نیم‌فضا در سطح را نشان می‌دهد. این شکل در حالت چسبندگی کامل صفحه‌ی دایره‌ای با نیم‌فضا به‌ازای سختی‌های مختلف صفحه ترسیم شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش سختی صفحه، یکنواختی تغییرمکان قائم نیم‌فضا در سطح زیرصفحه بیشتر شده و با کاهش سختی صفحه این مقدار تغییرمکان غیریکنواخت و روند کاهنده خواهد داشت.

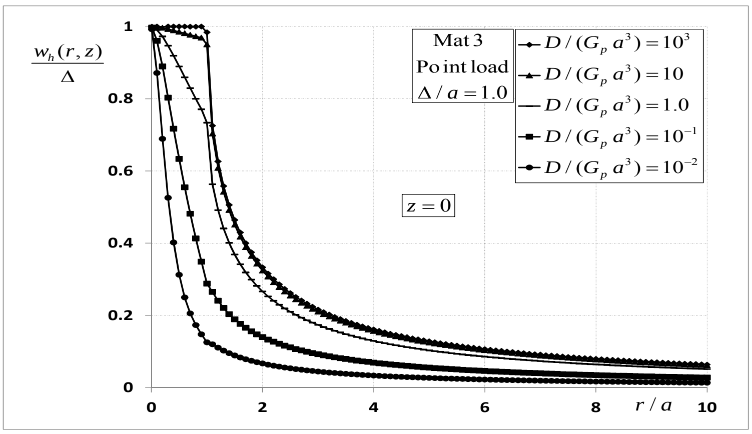
در انتها لازم به توضیح است که با توجه به گراف‌ها و جداول ارائه‌شده، اثر میزان ناایزوتروپی در پاسخ مسأله بدین صورت است که مقدار شعاع تماس (α) با نسبت A_{33}/G_p رابطه‌ی معکوس دارد به‌طوری‌که با افزایش این نسبت، شعاع چسبندگی صفحه کاهش می‌یابد. هم‌چنین روابط ارائه‌شده در این مقاله، برای نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی می‌باشد و با انتخاب مصالح ایزوتروپ نمی‌توان از این روابط استفاده نمود، چراکه برای نیم‌فضای ایزوتروپ نیاز به بازنویسی روابط و اصلاح مقادیر s_1 و s_2 و ساده‌سازی روابط می‌باشد که در مرجع [26] ارائه شده است.



شکل ۱٦ مقایسه‌ی تنش قائم نیم‌فضا در سطح بین مواد مختلف نیم‌فضا در حالت عدم چسبندگی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی و سختی ثابت صفحه



شکل ۱۷ مقایسه‌ی تغییرمکان قائم نیم‌فضا در عمق بین مواد مختلف نیم‌فضا در حالت عدم چسبندگی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی و سختی ثابت صفحه



شکل ۱۸ مقایسه‌ی تغییرمکان قائم نیم‌فضا در سطح به‌ازای سختی‌های مختلف صفحه در حالت چسبندگی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر دایره‌ای با نیم‌فضا تحت بار متمرکز مرکزی (ماده‌ی شماره‌ی ۳)

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به تحلیل توأم نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی و صفحه‌ی دایره‌ای انعطاف‌پذیر تحت اثر نیروی قائم متقارن نسبت به محور گذرنده از مرکز صفحه پرداخته شد. برای انجام تحلیل، ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر صفحه حل شد و از آن تابع گرین تغییرمکان قائم صفحه تحت بار حلقوی وارد بر آن به‌دست آمد. سپس نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار حلقوی قائم وارد بر آن بررسی شد و با حل معادله تعادل حاکم بر محیط، تابع گرین تغییرمکان قائم نیم‌فضا نیز به‌دست آمد. در ادامه با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی صفحه با نیم‌فضا، تابع تنش تماسی صفحه از حل معادلات انتگرالی حاکم بر مسأله با استفاده از روش المان‌های رینگی تعیین شد. با داشتن این تابع و انجام مراحل سعی و خطا، شعاع چسبندگی صفحه با نیم‌فضا تعیین شد و از نتایج آن نمودارهای تنش و تغییرمکان برای صفحه و نیم‌فضا در سطح تماس و در نواحی دوردست به‌صورت گراف‌هایی ارائه شد. نمودارهای ارائه‌شده نشان داد که با کاهش سختی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر، مقدار تنش تماسی $p_z(r)$ در زیر محل اثر بارگذاری روند افزایشی دارد به‌طوری که هرچه سختی صفحه به صفر نزدیک شود، مقدار تنش تماسی در محل بارگذاری به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. از طرفی دیگر با افزایش سختی صفحه، مقدار تنش تماسی در لبه صفحه بیشتر می‌شود به‌طوری‌که در صفحه با سختی بی‌نهایت (صفحه صلب)، تنش در لبه آن به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. هم‌چنین مشاهده شد که اثر میزان ناایزتروپی در پاسخ مسأله به نسبت A_{33}/G_p وابسته است به‌طوری که با افزایش نسبت فوق، جداشدگی صفحه و نیم‌فضا در شعاع کوچک‌تری اتفاق می‌افتد.

نمودارهای مربوط به تغییرمکان صفحه‌ی انعطاف‌پذیر و نیم‌فضا نشان می‌دهند که مقادیر آنها تابعی از جنس مصالح صفحه و نیم‌فضا می‌باشد و اثر متقابل سختی این دو محیط، بر آنها تأثیرگذار خواهد بود، به‌طوری که با افزایش سختی صفحه، مقدار تغییرمکان صفحه و نیم‌فضا یکنواخت‌تر می‌شود. با مقایسه‌ی اثر مواد مختلف نیم‌فضا بر تنش‌ها و تغییرمکان‌ها نشان داده شد که ماده‌ی شماره‌ی ۳ سختی بیشتری نسبت به سایر مواد دارد و بالعکس ماده‌ی شماره‌ی ۲ سختی کمتری نسبت به سایر مواد دارد. هم‌چنین با توجه به جداول و گراف‌های ارائه‌شده مربوط به محاسبه‌ی تنش تماسی، ثابت شد که با کاهش سختی صفحه‌ی انعطاف‌پذیر، شعاع تماس صفحه و نیم‌فضا (α) در نقاط نزدیک‌تری نسبت به محل اثر بارگذاری اتفاق می‌افتد و با افزایش سختی این شعاع به لبه‌ی صفحه نزدیک‌تر می‌شود به‌طوری که در حالت سختی بی‌نهایت، صفحه هیچ‌گاه دچار بلندشدگی نخواهد شد. هم‌چنین پدیده‌ی جداشدگی در گراف‌های مربوط نشان داده شد که طبق انتظار، از شعاع بعد از α تغییرمکان نیم‌فضا از صفحه بیشتر شد و با بلند شدن صفحه، عدم پیوستگی این دو محیط در این ناحیه مشاهده شد. در انتها با توجه به شکل‌های تغییرات تنش و تغییرمکان نیم‌فضا نسبت به سطح و عمق در نقاط دوردست، مشاهده شد که با دور شدن از محل اثر بارگذاری، مقادیر آنها به سمت صفر میل می‌کند که دلالت بر اصل منظم بودن جواب دارد. یکی دیگر از نتایج قابل ذکر در این قسمت، محاسبه‌ی سختی استاتیکی معادل خاک (K_{zz}) در حالتی است که سختی صفحه بی‌نهایت است (صفحه‌ی صلب) که با مقادیر تحلیلی موجود به‌ازای مواد مختلف نیم‌فضا، مطابقت دارد.

مراجع

۱. رحیمیان، محمد و اسکندری قادی، مرتضی ، "تئوری ارتجاعی"، انتشارات دانشگاه تهران، (۱۳۷۹).
۲. اردشیر بهرستاقی، عزیزالله و اسکندری قادی، مرتضی ، "تحلیل نیم‌فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر صفحه‌ی صلب دایره‌ای با استفاده

از توابع گرین بار حلقوی"، نشریه‌ی علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، ۲۲ (۱)، صفحات ص.ص. ۴۳-۵۸، (۲۰۱۱).

3. Celep, Z., "Rectangular plates resting on tensionless elastic foundation", *J. Eng. Mech.,* 114(2), doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399-114:12(2083), pp. 2083-2092, (1988).
4. Celep., Z. "Circular plate on tensionless Winkler foundation", *J. Eng. Mech.,* 114(10), doi: 10.1061/(ASCE) 0733-9399-114:10(1723), pp. 1723-1739, (1988).
5. Celep, Z., Malaika, A., and Abu-Hussein, M., "Forced vibrations of a beam on a tensionless foundation." *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 128, Issue. 2, pp. 235-246, (1989).
6. Celep, Z., "In-plane vibrations of circular rings on a tensionless foundation." *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 143, Issue. 3, pp. 461-471, (1990).
7. Celep, Z., and Demir, F.. "Circular rigid beam on a tensionless two-parameter elastic foundation." *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* Vol. 85, Issue. 6, pp. 431-439, (2005).
8. Celep, Z., and Demir, F. "Symmetrically loaded beam on a two-parameter tensionless foundation", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 27, No. 5, pp. 555-574, (2007).
9. Celep, Z., and Guler, K. "Axisymmetric forced vibrations of an elastic free circular plate on a tensionless two parameter foundation", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 301, Issues. 3-5, pp. 495-509, (2007).
10. Ding, H., and Chen, W., and Zhang, L., "Elasticity of transversely isotropic materials." Published by Springer, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, (2006).
11. Elliott, H. A., "Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 44, pp. 522-533, (1948).
12. Eskandari-Ghadi, M. "A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media", *J. of Elasticity,* 81, pp. 1-19, (2005).
13. Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S., and Ardeshir-Behrestaghi, A., "Transversely isotropic elastodynamic solution of a finite layer on an infinite subgrade under surface loads", Soil Dynamics and Earthquake Engineering 8, pp. 986-1003, (2008).
14. Eskandari-Ghadi, M., Fallahi, M., and Ardeshir-Behrestaghi, A., "Forced vertical vibration of Rigid circular disc on a transversely isotropic half-space", *Journal of engineering mechanics © ASCE/ July,* pp. 913-922, (2010).
15. Eskandari-Ghadi, M., Ardeshir-Behrestaghi, A., "Forced vertical vibration of rigid circular disc buried in an arbitrary depth of a transversely isotropic half space", Soil dynamics and earthquake engineering 30, doi: 10.1016/j, pp. 547-560, (2010).
16. Eskandari-Ghadi, M., Mirzapour, A., and Ardeshir-Behrestaghi, A. "Rocking vibration of a rigid circular disc buried in an a transversely isotropic full space", Numerical and analytical method in geomechanics, doi: 10.1002/nag. 976, pp. 547-560, (2010).
17. Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S., and Ardeshir-Behrestaghi, A., "A hybrid analytical-numerical method for vertical concentric multi-annular punch contact with a transversely isotropic elastic half-space", *Journal of applaied mechanics,* J_ID: JAM DOI: 10.1115/1.4005546, (2011).

18. Eubanks, R. A., and Sternberg, E., "On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy", *Journal of rational mechanics and analysis,* pp. 89-101, (1954).
19. Gladwell, G.M.L., and Iyer, K.P.R., "Unbonded contact between a circular plate and an elastic half-space", *Journal of Elasticity,*Vol. 4, pp. 115-130, (1974).
20. Gurtin, M.E., "The linear theory of elasticity", In: S. Flugge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. Via/2, Mechanics of Solids II, ed C. Truesdell. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp. 1-295, (1972).
21. Hu, H. C., "On the three dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body", Sci. Sinica, Vol. 2, pp. 145-151, (1953).
22. Lekhnitskii, S. G., "Theory of anisotropic elastic bodies", Holden-Day publishing Co., San Fransisko, Calif, (1981).
23. Luco, J. E., and Mita, A., "Response of a circular foundation on a uniform half-space to elastic waves", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15, pp. 105-118, (1987).
24. Michell, J. H., "The stress in an aelotropic elastic solid with an infinite plane boundary", Proceeding of the London mathematical society, Vol. 32, pp. 247-258, (1900).
25. Nowacki, W., "The stress function in three dimensional problems concerning an elastic body characterized by transversely isotropy", Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 2, pp. 21-25, (1954).
26. Pak, R. Y. S., Simmons, B. M., and Ashlock, J. C., "Tensionless contact of a flexible plate and annulus with a smooth half-space under axisymmetric loads by integral equations", *International Journal of mechanical Sciences 50,* pp. 1004–1011, (2008).
27. Pan, Y. C., and Chou, T. W., "Green's functions solutions for semi-infinite transversely isotropic materials", *Int, J. Eng. Sci,* 17(5), pp. 545-551, (1979).
28. Sneddon, I. N., "Fourier transforms", McGraw Hill, New York, N. Y, (1951).
29. Szilard, R., "Theory and analysis of plates, Classical and Numerical Methods", Prentice- Hall, Inc., Englawood Cliffs, New Jersey, (1974).
30. Timoshenko, S.P.. and Woinowski-Kreiger, S., "Theory of plates and shells", 2nd ed. New York: McGraw Hill, (1959).
31. Wang, M. Z., and Wang, W., "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity", *International Journal of Solids and Structures,* 32 (374), pp. 501-513, (1995).
32. Weitsman, Y., "ON the unbounded contact between plates and an elastic half space", *Journal of applied Mechanics,* ASME; 36, pp. 198-202, (1969).
33. Weitsman, Y., "Onset of separation between a beam and a tensionless elastic foundation under a moving load", *International Journal of Mechanical Sciences,* 13 (8), pp. 707-711, (1971).
34. Weitsman, Y., "A tensionless contact between a beam and an elastic half-space", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, pp.73, (1972).